

Questões

1. Seja T o operador linear em \mathbb{R}^3 definido por: $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$. Assinale a afirmação verdadeira.

- (a) A dimensão da imagem de T é 1 e a dimensão do núcleo de T é 2.
- (b) A dimensão da imagem de T é 3 e a dimensão do núcleo de T é 0.
- (c) A dimensão da imagem de T é 2 e a dimensão do núcleo de T é 1.
- (d) A dimensão da imagem de T é 0 e a dimensão do núcleo de T é 3.
- (e) A dimensão da imagem de T é 2 e a dimensão do núcleo de T é 2.

2. Seja o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z :

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\2x + 3y + az &= 3 \\x + ay + 3z &= 2\end{aligned}$$

Assinale a alternativa com os valores de a para os quais o sistema possui respectivamente:

- (i) Nenhuma solução, (ii) mais de uma solução, (iii) uma única solução.
- (a) (i) $a = -3$; (ii) $a = 2$; (iii) $a \neq 2$ e $a \neq -3$
 - (b) (i) $a \neq 2$ e $a \neq 3$; (ii) $a = 2$; (iii) $a = -3$
 - (c) (i) $a = 2$; (ii) $a \neq 2$ e $a \neq 3$; (iii) $a = -3$
 - (d) (i) $a = -3$; (ii) $a \neq 2$ e $a \neq -3$; (iii) $a = 2$
 - (e) (i) $a = -3$; (ii) $a = 2$; (iii) $a = 2$ ou $a = -3$
3. Quantos anagramas distintos podem ser formados com a palavra **cochilo**? Um **anagrama** é uma palavra formada pela transposição das letras de outra palavra. Iracema e Rmciaae são dois exemplos de anagramas distintos da palavra América. Observe que a palavra formada não precisa ter sentido.
- (a) 5040
 - (b) 2520
 - (c) 630
 - (d) 1260
 - (e) 120

4. A equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(-2,4)$ é:
- (a) $4x - y + 4 = 0$
 - (b) $4x + y + 4 = 0$
 - (c) $y - 4x + 4 = 0$
 - (d) $4y - x + 4 = 0$
 - (e) $4y + x - 4 = 0$
5. Se $f(x) = \log_a 1/x$, então $f(a^n)$ é:
- (a) $1/n$
 - (b) $-1/n$
 - (c) n
 - (d) $-n$
 - (e) $1/a$
6. Considere que o custo total para se produzir x peças por dia em uma fábrica seja dado por $c(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ Reais e que o preço de venda de uma peça seja $v(x) = 50 - \frac{1}{2}x$ Reais. Para maximizar o lucro total, a produção diária, x , deve ser de:
- (a) 12 peças/dia
 - (b) 20 peças/dia
 - (c) 15 peças/dia
 - (d) 10 peças/dia
 - (e) 100 peças/dia
7. A distância da origem à reta $4x - 3y - 15 = 0$ é:
- (a) $1/3$
 - (b) 3
 - (c) -3
 - (d) $-1/3$
 - (e) $2/3$
8. As coordenadas do centro e do raio da circunferência $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$ são:
- (a) centro = $(5, -3)$ e raio = 15
 - (b) centro = $(3/2, 5/2)$ e raio = $7/2$
 - (c) centro = $(-5, 3)$ e raio = 15
 - (d) centro = $(5/2, -3/2)$ e raio = 4
 - (e) centro = $(-5/2, 3/2)$ e raio = 4

9. Assinale a proposição logicamente equivalente a $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$

- (a) $\neg p \wedge (p \vee \neg q)$
- (b) $\neg p$
- (c) $(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$
- (d) $(p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$
- (e) p

10. Considere as seguintes preposições:

- I. $\neg p \vee q$
- II. $\neg(p \wedge \neg q)$
- III. $p \rightarrow q$
- IV. $(V \rightarrow q) \vee (p \rightarrow F)$

Quais das proposições acima são logicamente equivalentes?

- (a) Somente (I) \equiv (III)
- (b) Somente (I) \equiv (II)
- (c) Somente (I) \equiv (II) \equiv (III)
- (d) (I) \equiv (III) e (II) \equiv (III) mas (III) $\not\equiv$ (IV)
- (e) (I), (II), (III) e (IV) são todas equivalentes.

11. O número de seqüências de bits de comprimento 7 que contém um número par de zeros é:

- (a) 128
- (b) 64
- (c) 32
- (d) 16
- (e) 8

12. Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$. Qual das alternativas é uma partição do conjunto A .

- (a) $\{x < -1\}, \{x > 1\}, \{1, -1\}$
- (b) $\{x \leq 0\}, \{x \geq 1\}, \{0\}$
- (c) $\{x \leq -1\}, \{x \geq 3\}, \{1 \leq x \leq 3\}$
- (d) $\{x \leq -5\}, \{-5 < x \leq -3\}, \{-1\}, \{x \geq 1\}$
- (e) Todas as alternativas são partições de A .

13. Dados dois vetores no espaço euclidiano \mathbb{R}^4 , $u = (1, 3, -2, 7)$ e $v = (0, 7, 2, 2)$, pode-se afirmar que:

- (a) o quadrado da norma de u é igual a 58
- (b) o quadrado da distância entre u e v é dado por 63
- (c) o quadrado da norma de v é igual a 57
- (d) os vetores u e v são ortogonais
- (e) nenhuma das anteriores

14. Uma condição necessária e suficiente para que o sistema $Ax = b$ tenha solução única é:

- (a) $Ax = 0$ tem solução única.
- (b) As linhas de A são vetores linearmente independentes.
- (c) As colunas de A são vetores linearmente independentes que geram um subespaço contendo b .
- (d) A matriz A é quadrada e não-singular.
- (e) O posto de A é igual a seu número de linhas.

15. Não é correto afirmar que:

- (a) Se as colunas de uma matriz são vetores dois a dois ortogonais, então sua inversa é sua transposta.
- (b) Se a inversa de uma matriz é ela própria, então toda potência dessa matriz é ela própria ou a identidade.
- (c) Se uma matriz singular é o produto de duas outras matrizes quadradas, então uma destas também é singular.
- (d) Se três matrizes quadradas A , B e C satisfazem $A(B - C) = 0$, então $A = 0$ ou $B = C$.
- (e) Se A e B são matrizes triangulares inferiores então AB também é triangular inferior.

16. Seis amigos reúnem-se para disputar partidas de xadrez em três tabuleiros diferentes. Calcule o número de partidas diferentes possíveis levando-se em conta os tabuleiros mas não a cor das peças. Isto é, se os jogadores A e B jogam no primeiro tabuleiro é uma partida diferente deles jogando no segundo tabuleiro, mas quem joga com as brancas ou pretas é irrelevante.

- (a) 15
- (b) 30
- (c) 90
- (d) 120
- (e) 720

As duas questões a seguir são baseadas no seguinte enunciado:

Um algoritmo probabilístico A resolve problemas de dois tipos:

{Problemas do tipo 1}: os quais são resolvidos corretamente com probabilidade $3/4$ e correspondem a $1/3$ do total de problemas.

{Problemas do tipo 2}: os quais são resolvidos corretamente com probabilidade $1/2$ e correspondem a $2/3$ do total de problemas.

17. i. Um problema é selecionado aleatoriamente e resolvido pelo algoritmo. Qual é a probabilidade de que a resposta obtida seja correta?

- (a) $3/4$
- (b) $5/12$
- (c) $5/8$
- (d) $7/12$
- (e) $3/8$

18. ii. Verifica-se, utilizando algum método determinístico, que a resposta encontrada pelo algoritmo está realmente correta. Qual a probabilidade de que o problema resolvido seja do tipo 1?

- (a) $4/9$
- (b) $3/4$
- (c) $7/12$
- (d) $3/7$
- (e) $7/3$

19. A representação polar do número complexo $5i$ é dada por:

- (a) $(5, -90^\circ)$
- (b) $(5, 90^\circ)$
- (c) $(5, 180^\circ)$
- (d) $(5, -180^\circ)$
- (e) nenhuma das alternativas

20. Se $x = 2 + 2i$ e $y = i$, então, o produto xy é dado por:

- (a) $2 + 2i$
- (b) $4 + 2i$
- (c) $-2 + 2i$
- (d) $4i$
- (e) nenhuma das alternativas

Respostas

1-B

Dimensão do Núcleo de T

Em uma transformação linear $T: V \rightarrow W$, o conjunto de todos os vetores $v \in V$ tais que $T(v) = 0$ é chamado núcleo de T , com notação $\ker(T)$. Para acharmos o núcleo de T , façamos $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x - 4y = 0 \\ 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & -4 & 0 & | & 0 \\ 3 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 3 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 12 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o núcleo de T é o conjunto $\{(0, 0, 0)\}$ composto apenas pelo vetor nulo. Esse conjunto possui dimensão igual a 0.

Dimensão da Imagem de T

Seja T uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ a imagem de T , $Im(T)$, é o conjunto dos vetores $w \in W$ tais que existe um vetor $v \in V$ que satisfaz $T(v) = w$.

Para obter a dimensão da Imagem de T , vamos encontrar uma base que gere esta imagem e verificar qual é a sua dimensão. Lembramos que para que um conjunto de vetores B seja uma base de um espaço vetorial H é necessário que:

- I) B gere H
- II) B é linearmente independente

A forma mais simples de encontrar uma base é selecionarmos os vetores resultado a aplicação de T sobre a base canônica de \mathbb{R}^3 . Assim, usando a expressão $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ temos:

$$T(1, 0, 0) \Rightarrow (0, 1, 3)$$

$$T(0, 1, 0) \Rightarrow (2, -4, 0)$$

$$T(0, 0, 1) \Rightarrow (1, 0, 0)$$

É fácil ver que estes vetores geram a $Im(T)$, uma vez que cada um deles representa a escolha de uma variável mantendo as outras iguais a zero. Para verificar se os vetores são linearmente independentes, basta efetuarmos o escalonamento. Se uma das linhas desaparecer (todos os coeficientes iguais a zero), significa que os vetores são linearmente dependentes, caso contrário, serão linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Os vetores $(0,1,3)$; $(2,-4,0)$ e $(1,0,0)$ são linearmente independentes e, como também geram a $Im(T)$, determinam uma base de para ela. Portanto, a dimensão da $Im(T) = 3$

Para os mais inclinados na memorização de teoremas, acompanhe o resultado abaixo:

Se V tem dimensão finita e seja $T: V \rightarrow W$ linear, então:

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(Im T)$$

Como $\dim V = 3$ e $\dim(\ker T) = 0$ temos que $\dim(Im T) = 3$

2-A

A solução do sistema dado, utilizando a regra de Cramer, é dado por D_x/D , D_y/D e D_z/D . Assim, temos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 - a$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a$$

Observe que

$$D = 0 \rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -3$$

$$D_x = 0 \rightarrow a = 2 \text{ ou } a = -3$$

$$D_y = 0 \rightarrow a = 2$$

$$D_z = 0 \rightarrow a = 2$$

Para que o sistema não possua soluções é necessário que $D = 0$ e também que $D_x \neq 0$ ou $D_y \neq 0$ ou $D_z \neq 0$. Note que somente quando $a = -3$ esta condição é satisfeita.

Para que o sistema possua mais de uma solução ele precisa ser indeterminado, o que implica que $D = D_x = D_y = D_z = 0$. Baseado nas observações acima a única maneira de obtermos mais do que uma solução é quando $a = 2$.

Para que o sistema possua uma única solução é necessário que $D \neq 0$, isto é, quando $a \neq 2$ e $a \neq -3$

3-D

Se a palavra solicitada não tivesse letras repetidas haveriam $7!$ anagramas, uma vez que para a primeira posição poderíamos escolher 7 letras, para a segunda 6, para a terceira 5 e assim por diante resultando num total de $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$. Porém, a palavra **cochilo** possui repetição de duas letras, a letra O e a letra C.

Vamos utilizar um pequeno truque representando a palavra da maneira ao lado $C_1O_1C_2HILO_2$. O número de anagramas da palavra cochilo alterada é portanto $7!$ já que $C_1 \neq C_2$ e $O_1 \neq O_2$. Porém, para cada 4 anagramas alterados teremos apenas um anagrama original, no exemplo abaixo temos 4 representações alteradas do anagrama *HOCILCO*

$$HO_1C_1ILC_2O_2$$

$$HO_1C_2ILC_1O_2$$

$$HO_2C_1ILC_2O_1$$

$$HO_2C_2ILC_1O_1$$

Enfim, precisamos dividir $7!$ por 4, formalmente o resultado é $\frac{7!}{2!2!} = 1260$

4-B

Sabemos que a derivada da função y num ponto dado será igual a inclinação da reta que passa por este ponto. Assim a derivada da função é $y' = 2x$. No ponto -2 , a inclinação da reta tangente ao ponto $(-2,4)$ é igual a $2 \times -2 = -4$.

A inclinação da reta é também igual a diferença em y de dois pontos distintos dividido pela diferença em x . Assim, qualquer ponto arbitrário (x, y) desta reta deverá obedecer a seguinte relação:

$$\frac{y - (4)}{x - (-2)} = -4$$

Enfim,

$$\frac{y - 4}{x + 2} = -4 \Rightarrow y - 4 = -4x - 8 \Rightarrow 4x + y + 4 = 0$$

5-D

$$f(a^n) = \log_a \frac{1}{a^n} = \log_a 1 - \log_a a^n = 0 - n = -n$$

6-D

Vamos definir a função $L(x)$ que representa o lucro diário da fábrica. Assim

$$\begin{aligned} L(x) &= xv(x) - c(x) \\ &= 50x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^2 - 35x - 25 \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25 \end{aligned}$$

A produção diária que resulta em lucro máximo ocorrerá quando a derivada da função $L(x)$ for igual a zero, ponto de máximo da função.

Enfim,

$$\begin{aligned} L'(x) &= \frac{-3x}{2} + 15 \\ L'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{-3x + 30}{2} = 0 \Rightarrow x = 10 \end{aligned}$$

7-B

Para os adeptos à memorização de fórmulas, a distância de um ponto $P(x, y)$ à uma reta $ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d = \frac{|ax_p + ay_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Logo, a distância pedida é igual a $d = \frac{|4 \times 0 - 3 \times 0 - 15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{-15}{\sqrt{25}} = 3$

Porém, mesmo que não lembremos da fórmula é possível resolver o exercício.

Observe que o problema dado é equivalente a descobrirmos a altura do triângulo retângulo determinado pela reta dada e os dois eixos cartesianos. Se tomarmos $x = 0$ e $y = 0$ descobriremos o tamanho dos catetos e por conseguinte, da hipotenusa.

$$x = 0 \Rightarrow y = -5$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 15/4$$

Assim, um dos catetos possui tamanho 5, o outro tamanho $\frac{15}{4}$ e a hipotenusa é igual a

$$\sqrt{5^2 + \frac{15^2}{4^2}} = \sqrt{25 + \frac{225}{16}} = \sqrt{\frac{625}{16}} = \frac{25}{4}$$

Utilizando as propriedades do triângulo retângulo, podemos escrever a seguinte identidade:

$$\frac{15^2}{4^2} - x^2 = 25 - \left(\frac{25}{4} - x\right)^2 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

Enfim, a altura do triângulo retângulo considerado é igual a $\sqrt{\frac{225}{16} - \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{144}{16}} = \frac{12}{4} = 3$

8-D

Uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos que distam R do centro (C_x, C_y) . O Teorema de Pitágoras diz que para que um ponto arbitrário (x, y) pertença a uma circunferência de raio R e centro (C_x, C_y) a seguinte relação deverá ser válida:

$$(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = R^2$$

$$x^2 - 2xC_x + C_x^2 + y^2 - 2yC_y + C_y^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xC_x - 2yC_y + C_x^2 + C_y^2 - R^2 = 0$$

Multiplicando os dois lados por k temos

$$kx^2 + ky^2 - k2xC_x - k2yC_y + kC_x^2 + kC_y^2 - kR^2 = 0$$

Vamos agora descobrir os valores de k, C_x, C_y e R para que a equação acima fique idêntica a equação dada no enunciado $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$

Assim temos,

$$\begin{aligned} k &= 2 \\ -2kC_x &= -10 \\ -2kC_y &= 6 \\ kC_x^2 + kC_y^2 - kR^2 &= -15 \end{aligned}$$

De $k = 2$ segue que $C_x = 5/2$ e $C_y = -3/2$. Substituindo estes valores na última equação temos:

$$2 \times \frac{25}{4} + 2 \times \frac{9}{4} - 2R^2 = -15 \Rightarrow 2R^2 = \frac{25+9}{2} + 15 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{25+9+30}{4}} = 4$$

9-B

Aplicando as propriedades da álgebra booleana podemos facilmente realizar as transformações abaixo e obtermos a resposta correta.

$$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q) = (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) = \neg p \wedge (\neg q \vee q) = \neg p$$

Porém, nem sempre lembramos de cabeça as propriedades. Nestes casos é recomendável montar um esboço da tabela verdade. Parece complicado fazer isso em tempo de prova, porém, acreditem, com um bom treino sempre é possível cortar alguns caminhos e resolver a questão. Observe abaixo a tabela verdade completa envolvendo todas as alternativas.

p	q	$\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$	$\neg p \wedge (p \vee \neg q)$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$	$(p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$	p
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	V	F

10-E

Vamos montar a tabela verdade para cada uma das preposições e compará-las

p	q	V	F	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$p \rightarrow q$	$(V \rightarrow q) \vee (p \rightarrow F)$
V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V

Como podemos perceber, todas as preposições são equivalentes

11-B

Questões envolvendo seqüências de bits de comprimento 7 são recorrentes nas provas de Matemática do POSCOMP. A variação escolhida para este ano de 2006 foi a mais simples de todas as anteriores.

Para calcular o número de seqüências de 7 bits com um número par de zeros basta calcularmos o número de seqüências com nenhum zero, 2 zeros, 4 zeros e 6 zeros.

Enfim, o número de seqüências com nenhum zero é igual a 1, isto é, só existe uma seqüências de bits com nenhum zero: 1111111.

Com 2 zeros, temos $C_2^7 = 21$ seqüências, uma vez que este número é equivalente a combinação 7 elementos tomados dois a dois.

Com 4 zeros, temos $C_4^7 = 35$ e finalmente, com 6 zeros temos $C_6^7 = 7$ seqüências

Enfim, o total de seqüências de 7 bits com um número par de zeros é igual a:

$$C_0^7 + C_2^7 + C_4^7 + C_6^7 = 1 + 21 + 35 + 7 = 64$$

12-A

Uma partição de um conjunto A é uma coleção $\{C_i\}$ de subconjuntos não vazios de A tais que:

- I) Cada $a \in A$ pertence a algum dos C_i
- II) Os conjuntos em $\{C_i\}$ são dois a dois disjuntos; isto é se $C_i \neq C_j \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$

Em outras palavras uma partição de um conjunto A é uma coleção de critérios (subconjuntos de A) que subdivide o conjunto original em partes não sobrepostas.

Vamos analisar individualmente cada uma das alternativas e verificar se são ou não partições de A .

- a) Sim, é uma partição e portanto a alternativa correta. Não há sobreposição entre os subconjuntos apresentados e todos os elementos de A pertencem a um dos subconjuntos
- b) Não é uma partição pois há sobreposição entre os subconjuntos $\{x \leq 0\}$ e $\{0\}$
- c) Não é uma partição pois há sobreposição entre os subconjuntos $\{x \geq 3\}$ e $\{1 \leq x \leq 3\}$.
- d) Apesar de não haver sobreposições entre os subconjuntos, também não é uma partição pois há elementos em A que não pertencem a nenhum subconjunto apresentado. Precisamente, todos os elementos do conjunto $\{-3 < x \leq -1\}$ não estão presentes.
- e) Obviamente esta alternativa é incorreta.

13-C

A norma ou comprimento de um vetor u em \mathbb{R}^n , denotada $\|u\|$ é definida como a raiz quadrada não negativa de $u \cdot u$. Em particular, se $u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, então:

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$$

Assim, temos:

$$\|u\|^2 = \left(\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2 + 7^2} \right)^2 = 63$$

$$\|v\|^2 = \left(\sqrt{0^2 + 7^2 + 2^2 + 2^2} \right)^2 = 57$$

Portanto, C é a alternativa correta.

Analisando as outras alternativas, a alternativa A é obviamente errada já que o quadrado da norma de u é 63 como vimos acima e não 58. A alternativa B também está errada uma vez que a distância entre os dois vetores u e v é dada por:

$$\|u - v\| = \sqrt{(0 - 1)^2 + (7 - 3)^2 + (2 + 2)^2 + (2 - 7)^2} = \sqrt{58} \Rightarrow \|u - v\|^2 = 58$$

Finalmente a alternativa D também é incorreta. Dois vetores são ortogonais se o seu produto interno ou produto escalar entre eles for igual a 0. Isto é, dados $u = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e $v = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ em \mathbb{R}^n

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = 0$$

Como $u \cdot v = 1 \times 0 + 3 \times 7 + (-2) \times 2 + 7 \times 2 = 39 \neq 0$

Temos que u e v não são ortogonais.

14-D

É comum apresentarmos um sistema linear com a notação acima $Ax = b$, onde A é a matriz dos coeficiente enquanto x e b também são matrizes, porém escritos em minúsculo para enfatizar que são vetores-coluna.

Assim, para que tenhamos apenas uma solução para o sistema, é necessário e suficiente que a matriz A seja inversível. Seja A^{-1} a inversa de A temos:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Uma matriz é singular se a equação $Ax = 0$ tem uma solução não nula para x . Além disso, se a matriz é quadrada e não-singular ela será inversível já que este fato garante que o sistema tenha uma solução (SPD) e que, portanto, $\det A \neq 0$. Este último resultado, garante que A seja inversível.

Vamos analisar cada uma das alternativas

- (a) Incorreta: Nada garante que A seja uma matriz quadrada, neste caso o sistema teria solução única e mesmo assim A não seria inversível.
- (b) Incorreta: Mais uma vez, a condição não garante que a matriz A seja quadrada.
- (c) Incorreta: Novamente, a condição não garante que a matriz A seja quadrada. É possível montar um sistema onde A não seja uma matriz quadrada, com colunas linearmente independentes e que geram um subespaço que contém b .
- (d) Correta: De fato, como vimos, se a matriz A é quadrada e não-singular, ela é inversível.
- (e) Incorreta: O posto de uma matriz é o número de linhas não nulas da matriz quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas. O posto coincide com a dimensão do espaço linha da matriz. Assim, como a outras alternativas incorretas, esta também não garante que a matriz seja A seja quadrada, afinal, um sistema linear com apenas uma equação tem posto igual a 1 que é igual ao número de linhas da matriz A dos coeficientes. Note que A neste caso não é quadrada, portanto não é inversível.

15-D

Exercício com possíveis problemas. Aparentemente, podemos afirmar como não corretas as alternativas (a) e (d).

Vamos analisar cada uma das alternativas

- a) Falsa: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A alternativa diz que se as colunas da matriz são vetores dois a dois ortogonais, então sua inversa é sua transposta. Ora os vetores são dois a dois ortogonais já que $3 \times 0 + 1 \times 0 = 0$. Porém sua inversa não é sua transposta. Observe que $AA^T \neq I$, $A^T A \neq I$ e $AA^T \neq A^T A$.

$$AA^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- b) Verdadeira: Se uma matriz A tem como inversa ela própria, temos que $A^2 = A \cdot A = I$, onde I é a identidade. Assim, $A^3 = I \cdot A = A$ e $A^4 = A \cdot A = I$. Generalizando, sempre que a potência de A é par teremos como resultado a identidade, quando a potência for ímpar, o resultado será ela própria.
- c) Verdadeira: Uma matriz A é singular se a equação $AX = 0$ tem uma solução não nula para X . Considere então a matriz singular S . Suponha que existam matrizes A e B tal que $AB = S$. Ora, como S é singular, sabemos que existe uma matriz não nula, digamos R tal que $SR = 0$. Assim, se multiplicarmos a equação $AB = S$ por R , teremos que $ABR = SR$, ou seja, $ABR = 0$. Vamos então analisar duas possibilidades:
- i. Suponha que B não seja singular. Então, como R não é nula, $BR \neq 0$. Mas $ABR = A(BR) = 0$, então A é uma matriz singular.
 - ii. Suponha que A não seja singular. Então para que ABR seja igual a 0 é necessário que BR seja igual a 0 . Portanto B é singular.

Em qualquer um dos casos, A ou B são singulares.

- d) Falsa: Se A é uma matriz singular, então existe uma matriz R não nula tal que $AR = 0$. Se $B - C = R$ pode ocorrer um caso onde $A(B - C) = 0$ onde $A \neq 0$ e $B \neq C$. Observe o exemplo abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Note que:

$$A(B - C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

- e) Verdadeira: Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada cujas entradas acima da diagonal principal são todas nulas. Considere o resultado da multiplicação AB onde A e B são matrizes quadradas de ordem 3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & 0 \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

Neste caso, AB também é uma matriz triangular, inferior. É fácil generalizar este resultado para matrizes quadradas triangulares inferiores de quaisquer ordem, portanto a alternativa é verdadeira.

Enfim, existem duas alternativas corretas, a A e a D. Como a alternativa A tem um enunciado obscuro, é possível que o examinador a tenha usado apenas para despistar o aluno. Portanto, é provável que o POSCOMP tenha considerado a alternativa D como correta.

16-C

Questão mal formulada e cancelada do POSCOMP. Tudo leva a crer que a resposta seria o número de confrontos possíveis, isto é, $C_2^6 = 15$ multiplicado pelo número de tabuleiros resultado em $15 \times 3 = 45$. Porém esta alternativa não existe!

Se interpretarmos, porém, que o exercício pretende saber o número de configuração de partidas possíveis considerando que os seis jogadores estão jogando ao mesmo tempo, é possível chegarmos a uma contagem diferente.

Assim, nesta nova abordagem se os jogadores A e B estão jogando no tabuleiro 1, B e D no 2 e E e F no 3 temos uma configuração. Agora, se A e B estão novamente no 1, B e D estão agora no 3 e E e F no 2 temos outra configuração apesar de A e B não terem mudado de tabuleiro.

Nesta nova abordagem, uma configuração qualquer entre jogadores e tabuleiros pode ser representada da seguinte maneira:

A	B	C	D	E	F
1	2	2	3	1	3

Por exemplo, a configuração acima informa que os jogadores A e E jogam no tabuleiro 1, enquanto os jogadores B e C jogam no tabuleiro 2 e os jogadores D e F no tabuleiro 3. Seguindo este raciocínio, é possível perceber que qualquer distribuição envolvendo os caracteres 112233 irão representar uma maneira distinta de organizarmos um conjunto de partidas simultâneas.

O problema se resume então, a calcular de quantas maneira podemos escrever 112233 embaralhando os caracteres à vontade. Os mais atentos logo perceberão que este cálculo é análogo ao cálculo de quanto anagramas possui a palavra 112233 ou, se preferirem, quantos anagramas possui a palavra BOMBOM (Basta considerar 1=B, 0=2 e M=3).

Enfim, este número é igual a $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$

17-D

A probabilidade P de que a resposta correta seja obtida é igual a probabilidade que o problema seja do tipo 1 e seja resolvido mais a probabilidade de que o problema seja do tipo 2 e seja resolvido. Enfim:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

Apesar da simplicidade da resolução, é importante notar que organizar um problema de probabilidade nem sempre é fácil. Abaixo, propomos uma representação para aqueles mais inclinados a este tipo de abordagem. Lembramos que a notação $P(R|T_1)$ representa a probabilidade condicional do evento R ocorrer dado que T_1 ocorre.

T_1 : Problema é do tipo 1

T_2 : Problema é do tipo 2

R : Problema foi resolvido pelo algoritmo probabilístico A

$$P(T_1) = \frac{1}{3} \qquad P(T_2) = \frac{2}{3}$$

$$P(R|T_1) = \frac{P(R \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{3}{4} \qquad P(R|T_2) = \frac{P(R \cap T_2)}{P(T_2)} = \frac{1}{2}$$

$$P(R) = P(R \cap T_1) + P(R \cap T_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

18-D

Uma vez que o problema foi resolvido, qual é a probabilidade de que o mesmo seja do tipo 1? Vamos utilizar mais uma vez a probabilidade condicional. O que queremos saber é:

$$P(T_1|R) = \frac{P(T_1 \cap R)}{P(R)}$$

Sabemos pela resolução do exercício anterior que:

$$P(R) = \frac{7}{12}$$

$$P(R \cap T_1) = P(R|T_1) \times P(T_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

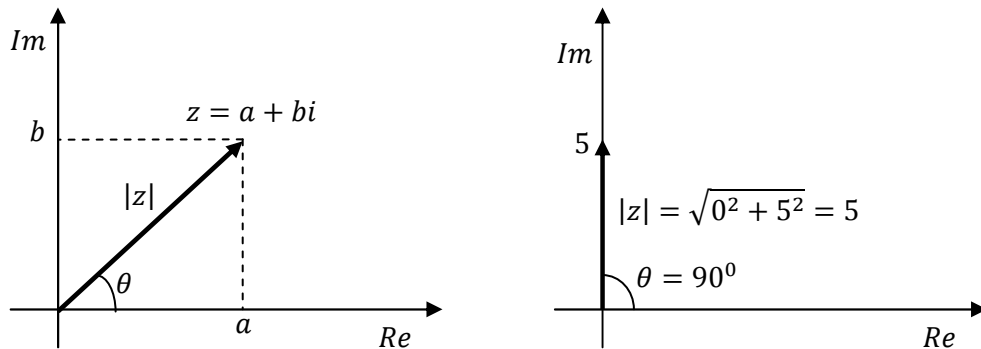
Enfim,

$$P(T_1|R) = \frac{P(T_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{1/4}{7/12} = \frac{3}{7}$$

19-B

Qualquer número complexo pode ser representado pela sua forma algébrica $z = a + bi$, com a e b reais e $i = \sqrt{-1}$. O número a é chamado parte real de z enquanto b representa a parte imaginária de z .

Outra maneira de representar um número complexo é através do plano de Argand-Gauss, que é um plano cartesiano onde o eixo das abscissas representa os números reais enquanto o eixo das ordenadas representa os números imaginários. Assim, um número $z = a + bi$ qualquer pode ser representado no plano de Argand-Gauss conforme a figura abaixo:



Representamos um número complexo em sua forma polar como $(|z|, \theta)$ onde $|z|$ é o módulo de z enquanto θ é o ângulo formado pelo eixo das abscissas e o vetor que representa o número z , também chamado argumento de z . O teorema de Pitágoras nos diz que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Quando representamos o número $5i$ no plano de Argand-Gauss (figura ao lado direito) é fácil perceber quais são os valores de $|z|$ e θ , respectivamente iguais a 5 e 90° . Logo, a alternativa correta é $(5, 90^\circ)$.

20-C

Sabemos que $i^2 = -1$, então:

$$x \cdot y = (2 + 2i)i = 2i + 2i^2 = 2i - 2 = -2 + 2i$$